# Opción A

## Ejercicio 1 opción A, modelo 6 del 2015

Halla a y b sabiendo que es continua la función f : R → R definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

### Solución

Como me dicen que f es continua en R, lo es en x = 0, por tanto al ser es continua en x = 0, tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

$$f(0) = b. \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} = \frac{0 + \cos(0) - a\cdot e^0}{(0)^2} = \frac{1 - a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe, al ser es continua en x = 0, y es finito **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir 1 - a = 0, de donde **a = 1**.

*Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, *entonces si existe* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *se verifica que* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. *La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞),* con lo cual tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \cos(x) - 1\cdot e^x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \text{sen}(x) - e^x}{2x} = \left\{\frac{1 - \text{sen}(0) - e^0}{2\cdot(0)} = \frac{0}{0}; \text{L'H}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) - e^x}{2} = \frac{-\cos(0) - e^0}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1.$$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, resulta que **b = -1.**

**Los valores pedidos son a = 1 y b = -1.**

## Ejercicio 2 opción A, modelo 6 del 2015 (Ejercicio 2B, modelo 4 de 2013)

Sea f la función definida por f(x) = |ln (x)| para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) [0'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 1.

b) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta y = 1.

c) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto citado.

### Solución

Sea f la función definida por f(x) = |ln (x)| para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano).

a)

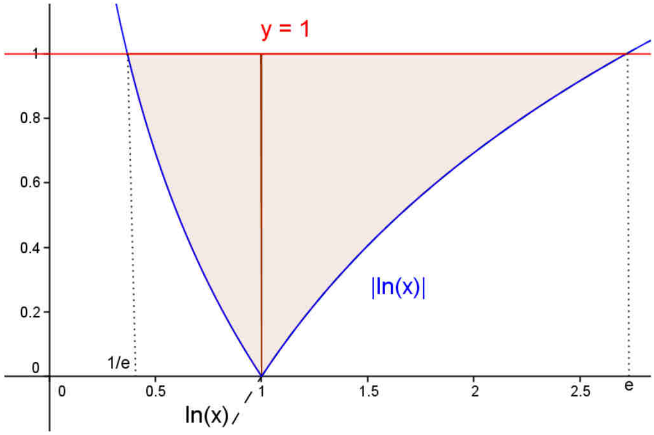
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 1.

$$f(x) = |\ln(x)| = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si} \quad \ln(x) < 0 \\ \ln(x) & \text{si} \quad \ln(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$, pues de ln(x) = 0, x = $e^0$ = 1

Sabemos que la gráfica de |ln(x)| es exactamente igual que la de "ln(x) para ln(x) > 0 (la parte de la gráfica que está por encima del eje OX, en este caso para x ≥ 1 porque ln(1) = 0), y simétrica respecto al eje OX cuando ln(x) < 0 (la parte de la gráfica que esta por debajo del eje OX, en este caso para x < 1).

Además sabemos que ln(1) = 0, ln(e) = 1, ln(x) es estrictamente creciente y que x = $0^+$ es asíntota vertical porque $\lim_{x\to 0-} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$. Además $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = \ln(+\infty) = +\infty$.

La recta y = 1 es una recta horizontal. Teniendo encuenta lo anterior un esbozo de las gráficas pedidas es:




b)
Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta y = 1.

Los cortes entre ellas salen de resolver la ecuación $|\ln(x)| = 1$, que son dos ecuaciones: $\ln(x) = 1$, de donde $x = e^1 = e$ (por recíproca) y $-\ln(x) = 1 \to \ln(x) = -1$, de donde $x = e^{-1} =$
$= 1/e$. **Los puntos de corte pedidos son (1/e,1) y (e,1).**

b)
Calcula el área del recinto anterior.

**Área =** $\int_{1/e}^{1} (1 - (-\ln(x))dx + \int_{1}^{e} (1 - (\ln(x))dx = \int_{1/e}^{1} (1 + \ln(x))dx + \int_{1}^{e} (1 - (\ln(x))dx = \{++\}$

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x\cdot\ln(x) - x$, pues es una integral por partes $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$.
$\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \to du = dx/x;\ dv = x \to v = \int dx = x\} = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot dx/x = x\cdot\ln(x) - \int dx =$
$= x\cdot\ln(x) - x$.

$\{++\} = [\, x + x\cdot\ln(x) - x]_{1/e}^{1} + [x - x\cdot\ln(x) + x]_{1}^{e} = [(1\cdot\ln(1)\,) - ((1/e)\cdot\ln(1/e)] + [(2(e) - e\cdot\ln(e)$
$) - (2(1) - 1\cdot\ln(1)] =$
$= 0 - ((1/e)\cdot(-1) + 2e - e\cdot(1) - 2 + 0$ **$= e + 1/e - 2 \cong$ 0’3504 $u^2$**

## Ejercicio 3 opción A, modelo 6 del 2015

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1’75 puntos] Halla el valor, o valores, de *m* para los que la matriz A tiene rango 2.
b) [0’75 puntos] Para *m = 1*, determina $A^{2015}$.

### Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Halla el valor, o valores, de *m* para los que la matriz A tiene rango 2.

El rango de A es 2 si A tiene dos filas linealmente independientes, por lo cual su determinante $\det(A) = |A| = 0$.

Después estudiaremos los rangos de A según los valores de “m”.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 0 - (m-1)\cdot(0 - m(1-m)) + 0 = m(1-m)^2.$$

De $= |A| = 0 \rightarrow m(1 - m)^2 = 0$, que tiene por soluciones m = 0 y m = 1 (doble).

**Si m = 0**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$, **rango(A) = 2**.

**Si m = 1**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, **rango(A) = 2.**

b)

Para *m = 1*, determina $A^{2015}$.

**Si m = 1**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$, matriz nula de orden 3.

$A^4 = O_3\cdot A = O_3$, etc …

Luego $A^{2015} = A^{2014}.A = O_3\cdot A = O_3$. Es decir **$A^{2015}$, es la matriz nula de orden 3.**

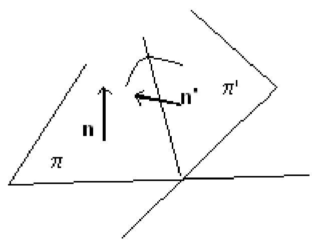
## Ejercicio 4 opción A, modelo 6 del 2015

Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a) [1’5 puntos] Determina el ángulo que forman $\pi$ y $\pi'$.

b) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro limitado por $\pi$ y los planos coordenados.

### Solución




Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a)

Determina el ángulo que forman $\pi$ y $\pi'$.

Sabemos que el *ángulo que forman dos planos* $\pi$(**n**) y $\pi'$(**n’**) es el menor de los ángulos que determinan sus diedros, el cual coincide con el menor de los ángulos que forman sus vectores normales con un origen común, es decir $\cos(<\pi,\pi'>) = |\cos(<\mathbf{n},\mathbf{n'}>)|$

De $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$, tenemos **n** = (1,3,2).

De $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 5 = 0$, tenemos **n’** = (-2,1,3)

$\cos(\alpha) = \cos(<\pi,\pi'>) = |\cos(<\mathbf{n},\mathbf{n'}>)| = \left|\dfrac{\vec{n}\bullet\vec{n}'}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n}'\|}\right| = 7/((\sqrt{14})^2 = 7/14 = 1/2$, por tanto el ángulo que forman los planos es **$\alpha$ = arcos(1/2) = 60º.**

$\mathbf{n}\bullet\mathbf{n'} = -2 + 3 + 6 = 7 \rightarrow |\,\mathbf{n}\bullet\mathbf{n'}\,| = |7| =$

$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

$\|\mathbf{n'}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

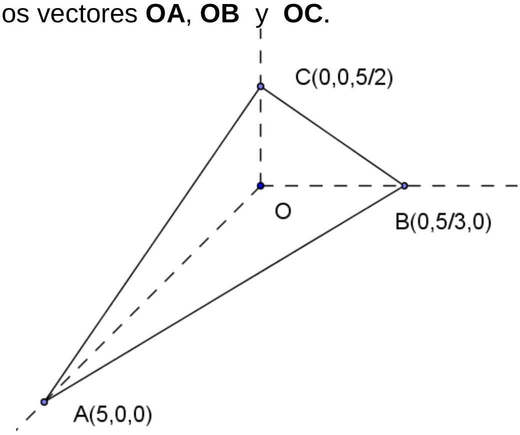
b)

Calcula el volumen del tetraedro limitado por $\pi$ y los planos coordenados.

Sabemos que si ponemos el plano $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$, en forma segmentaria $x/a + y/b + z/c = 1$, los puntos A(a,0,0), B(0,b,0) y C(0,0,c) son los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

De $x + 3y + 2z = 5 \rightarrow x/5 + (3y)/5 + (2z)/5 = 1 \rightarrow \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{5/3} + \dfrac{x}{5/2} = 1$, luego los puntos de corte con los ejes coordenados son A(5,0,0), B(0,5/3,0) y C(0,0,5/2).

Sabemos que el volumen de un tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan dichos vectores, el cual es el valor absoluto (lo notaremos **| |** ) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de tres vectores con un mismo origen, en nuestro caso utilizaremos los vectores **OA**, **OB** y **OC**.




**OA** = (5,0,0), **OB** = (0,5/3,0) y **OC** = (0,0,5/2)

**Volumen =** (1/6).| [**OA**, **OB**, **OC**] | = $(1/6).\left|\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix}\right| = (1/6).(5)\cdot(5/3)\cdot(5/2) =$

**$= 5^3/6^2\ u^3 = 125/36\ u^3$.**

## Opción B

### Ejercicio 1 opción B, modelo 6 del 2015

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) [1 punto] Halla los puntos de la gráfica de *f* cuya recta tangente es horizontal.

c) [0'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 0.

**Solución**

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = \dfrac{x^2+3x+1}{e^x}$.

a)

Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

Asíntotas verticales no tiene (no hay ningún número que anule el denominador)

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞/∞, y si el límite tiende a ∞]

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{e^x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}; L'H\right) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{e^x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}; L'H\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) de *f* en + ∞**

Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 0) = 0^+$, la gráfica de f(x) está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} ((-x)^2 + 3(-x) + 1)e^{-(-x)} = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1)e^x =$

$= (+\infty)\cdot(+\infty)\cdot = +\infty$, **no hay A.H. de la gráfica de f en - ∞**

b)

Halla los puntos de la gráfica de *f* cuya recta tangente es horizontal.

Sabemos que los puntos con tangente horizontal anulan la primera derivada, y al ser f continua y derivable en R las veces que necesitemos, dichos puntos serán extremos relativos.

Estudiamos f '(x)

$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 1)e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(2x + 3 - x^2 - 3x - 1) = e^{-x}\cdot(-x^2 - x + 2)$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^{-x}\cdot(-x^2 - x + 2) = 0$, como $e^{-x} \neq 0$ tenemos $-x^2 - x + 2 = 0$, de donde $x^2 + x - 2 = 0$. Se ve que las soluciones son x = -2 y x = 1; que serán los posibles extremos relativos.

Recuerdo que:

Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo

Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo

$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$. $f'(x) = e^{-x}\cdot(-x^2 - x + 2)$.

$f''(x) = e^{-x}\cdot(-1)\cdot(-x^2 - x + 2) + e^{-x}\cdot(-2x - 1) = e^{-x}\cdot(x^2 + x - 2 - 2x - 1) = e^{-x}\cdot(x^2 - x - 1)$.

Como $f''(-2) = e^2\cdot(4 + 2 - 1) > 0$, x = -2 es un mínimo relativo de f(x) que vale $f(-2) = (4 - 6 + 1)e^{-(-2)} = -1\cdot e^2$.

Como $f''(1) = e^{-1}\cdot(1 - 1 - 1) < 0$, x = 1 es un máximo relativo de f(x) que vale $f(1) = (1 + 3 + 1)e^{-1} = 5\cdot e^{-1} = 5/e$.

**Los puntos de la gráfica de *f* cuya recta tangente es horizontal son $(-2, -e^2)$ y (1,5/e).**

c)
Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x=0.

*La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0 es y - f(0) = f'(0)·(x - 0).*
$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x} \rightarrow f(0) = (1)e^0 = 1$.
$f'(x) = e^{-x}\cdot(- x^2 - x + 2) \rightarrow f'(0) = e^0\cdot(2) = 2$.
**La recta tangente pedida es y - 1 = 2(x - 0), de donde y = 2x + 1.**

## Ejercicio 2 opción B, modelo 6 del 2015

[2'5 puntos] Calcula $\int e^{2x}\cdot sen(x)dx$.

## Solución

Calcula $\int e^{2x}\cdot sen(x)dx$.

La integral pedida es una integral por partes $\int udv = uv - \int vdu$.
En nuestro caso $u = e^{2x}$ y $dv = sen(x)dx$, de donde, $du = 2e^{2x}dx$ y $v = \int dv =$
$= \int sen(x)dx = -cos(x)$.
$\mathbf{I = \int e^{2x}\cdot sen(x)dx} = e^{2x}\cdot(-cos(x)) - \int (-cos(x)\cdot 2e^{2x}\cdot dx = -e^{2x}\cdot cos(x) + 2\cdot I_1$.

$I_1 = \int e^{2x}\cdot cos(x)dx$ = {Integral por partes por partes, en nuestro caso $u = e^{2x}$ y $dv = cos(x)dx$, de donde, $du = 2e^{2x}dx$ y $v = \int dv = \int cos(x)dx = sen(x)$ } =
$= e^{2x}\cdot sen(x) - \int 2e^{2x}\cdot sen(x)dx = e^{2x}\cdot sen(x) - 2\int e^{2x}\cdot sen(x)dx = e^{2x}\cdot sen(x) - 2\cdot I$.

Tenemos $I = -e^{2x}\cdot cos(x) + 2\cdot I_1 = -e^{2x}\cdot cos(x) + 2\cdot(e^{2x}\cdot sen(x) - 2\cdot I)$, de donde:
$5\cdot I = -e^{2x}\cdot cos(x) + 2\cdot e^{2x}\cdot sen(x) \rightarrow$ $\mathbf{I = ( -e^{2x}\cdot cos(x) + 2\cdot e^{2x}\cdot sen(x) )/5 + K}$.

## Ejercicio 3 opción B, modelo 6 del 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z = 7 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores de $\alpha$.
b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

## Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z = 7 \end{cases}$

a)
Discute el sistema según los valores de $\alpha$.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & \alpha+4 \\ 3 & 1 & \alpha+4 & 7 \end{pmatrix}$.

El sistema tiene solución única si rango(A) = rango(A*) = 3 con lo cual det(A) = |A| $\neq$ 0.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1(\alpha)(\alpha+4) - 0 + \alpha(2-3\alpha) = \alpha(\alpha+4+2-3\alpha) =$$

$= \alpha(-2\alpha+6)$.

De $\alpha(-2\alpha+6) = 0$ obtenemos $\alpha = 0$ y $\alpha = 3$.

Si $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ y $\boldsymbol{\alpha \neq 3}$, $\det(A) \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas**, sistema compatible y determinado, y el sistema tiene solución única.**

**Si $\alpha = 0$**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -0 + 0 - 1(4 - 4) = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (en nuestro caso infinitas soluciones)**.

**Si $\alpha = 3$**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_2-3F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1(3 - 3) - 0 + 0 = 0$, por tanto rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (en nuestro caso infinitas soluciones)**.

b)

Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

Como ya hemos discutido para $\alpha = 2$ el sistema tiene solución única. Veámosla.

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x + y + 6z = 7 \end{cases} \begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \approx \begin{cases} x + 2z = 2 \\ +2y - 4z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

, de donde y = 1. Entrando en la 2ª $\rightarrow 2(1) - 4z = 2 \rightarrow z = 0$. Entrando en la 1ª $\rightarrow x + 2(0) = 2 \rightarrow x = 2$. **La única solución del sistema es (x,y,z) = (2, 1, 0).**

## Ejercicio 4 opción B, modelo 6 del 2015

Sean el punto P(1,6,−2) y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

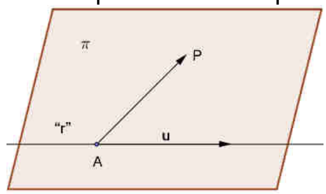
a) [1 punto] Halla la ecuación general del plano $\pi$ que contiene al punto P y a la recta r.

b) [1’5 puntos] Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

### Solución

Sean el punto P(1,6,−2) y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

a)
Halla la ecuación general del plano $\pi$ que contiene al punto P y a la recta r.



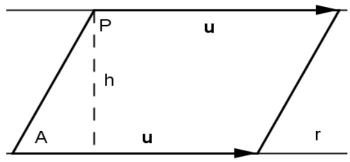

De la recta "r" tomo el punto A(5,-1,0) y el vector **u** = (6,-3,2), el otro vector independiente que me falta es el **AP** = (1-5,6+1,-2-0) = (-4,7,-2). Si X es un punto genérico del plano $\pi$, su ecuación es:

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{u},\mathbf{AP}) = 0 = \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 7 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-5)(6-14) - (y+1)(-12+8) + z(42+12) =$$

$= -8x + 4y + 30z + 44 = 0 \equiv$ $\mathbf{-4x + 2y + 15z + 22 = 0}$

b)
Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

Calculamos la distancia del punto P a la recta "r", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*




Dada la recta "r" conocemos el punto A(5,-1,0) y el vector **u** = (6,-3,2). Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.
El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AP** es ||**AP**x**u**||=base·altura = = ||**u**||·h, pero la altura "h" es d(P;r), luego d(P;r) = (||**AP**x**u**||)/(||**u**||) ("x" es el producto vectorial).

$$\text{Punto } P(1,6,-2).\ \mathbf{AP} = (-4,7,-2);\ \mathbf{AP}\times\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 7 & -2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(14-6) - \mathbf{j}(-8+12) + \mathbf{k}(12-42) =$$

= (8,-4,-30) ;
$||\mathbf{AP}\times\mathbf{u}|| = \sqrt{(8^2+4^2+30^2)} = \sqrt{(980)}$; $||\mathbf{u}|| = \sqrt{(6^2+3^2+2^2)} = \sqrt{(49)} = 7$
**Luego d(P;r)** = (||**AP**x**u**||) / (||**u**||) = $\sqrt{(980)}/7$ $\mathbf{= 2\sqrt{(5)}\ u^1}$.